

我是8位的

I am 8 bits, what about you?

随笔 - 205, 文章 - 0, 评论 - 103, 阅读 - 101万

导航

博客园
首页
新随笔
联系
订阅
管理

2022年3月						
日	一	二	三	四	五	六
27	28	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	1	2
3	4	5	6	7	8	9

公告

你的支持是我的动力
欢迎关注微信公众号“我是8位的”



昵称：我是8位的
园龄：4年7个月
粉丝：288
关注：5
+加关注

盖楼抽奖

#她的梦想在发光#

HWD科技女性故事有奖征集

分享最打动的科技女性故事

活动时间：2022年3月8日-3月18日

马上参与



搜索

找找看

谷歌搜索

常用链接

我的随笔
我的评论
我的参与
最新评论
我的标签

积分与排名

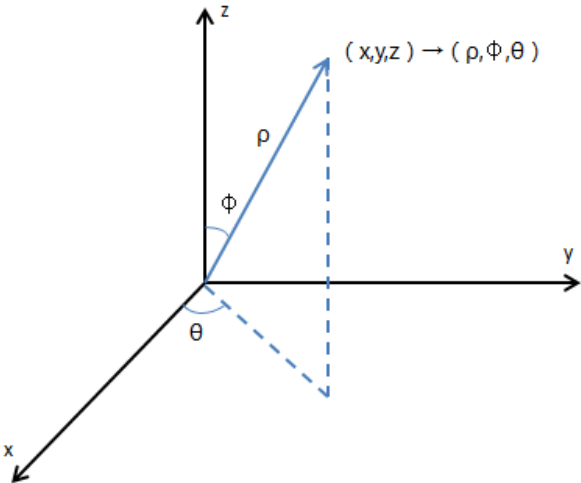
积分 - 457199
排名 - 1199

多变量微积分笔记20——球坐标系

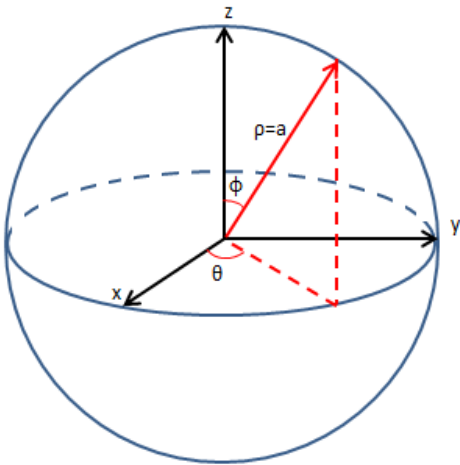
球坐标系是三维坐标系的一种，用以确定三维空间中点、线、面以及体的位置，它以坐标原点为参考点，由方位角、仰角和距离构成。球坐标系在地理学、天文学中都有着广泛应用。

球坐标系

球坐标中是这样表示空间中一点的：用 ρ 表示点到原点的距离， $0 \leq \rho < +\infty$ ；在 ρz 平面上，从 z 轴正半轴向 ρ 偏转的角度是 φ ， $0 \leq \varphi \leq \pi$ ；从 x 轴偏转到平面的角度是 θ ， $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ，如下图所示：



被称作球坐标的原因是，如果固定了 $\rho=a$ 作为半径，通过移动 ρ 就可以得到一个球面， φ 就是 ρ 的南北朝向， $0^\circ \leq \varphi < 90^\circ$ ， ρ 朝北， $90^\circ < \varphi \leq 180^\circ$ ， ρ 朝南：



如果将上图看作地球， φ 和纬度相似，都是衡量点到南北极点的距离。当然，在具体度量上有所差别，地理上赤道是 0° 纬线，然后向两极递增；球坐标的 φ 从北极点出发，向南极递增，赤道位置是 90° 。 θ 和经度类似，用来衡量东西方位，因此可将 x 轴正半轴的指向看作本初子午线，也就是 0° 经线，由于球坐标中 θ 的取值是 $[0, 2\pi]$ ，所以只有东经没有西经。

随笔分类 (211)

- ★★资源下载★★(1)
- Java并发编程(1)
- 程序员的数学(24)
- 单变量微积分(31)
- 多变量微积分(24)
- 概率(24)
- 机器学习(27)
- 软件设计(1)
- 数据分析(6)
- 数据结构与算法(27)
- 随笔(5)
- 线性代数(34)
- 项目管理(2)
- 转载(4)

随笔档案 (205)

- 2021年2月(1)
- 2020年3月(2)
- 2020年2月(6)
- 2020年1月(4)
- 2019年12月(7)
- 2019年11月(15)
- 2019年9月(3)
- 2019年8月(6)
- 2019年7月(1)
- 2019年6月(8)
- 2019年5月(3)
- 2019年4月(5)
- 2019年3月(7)
- 2019年2月(3)
- 2019年1月(7)
- 更多

阅读排行榜

- 1. 使用Apriori进行关联分析 (一) (29768)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (28772)
- 3. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(24430)
- 4. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(23099)
- 5. 多变量微积分笔记3——二元函数的极值(22772)

评论排行榜

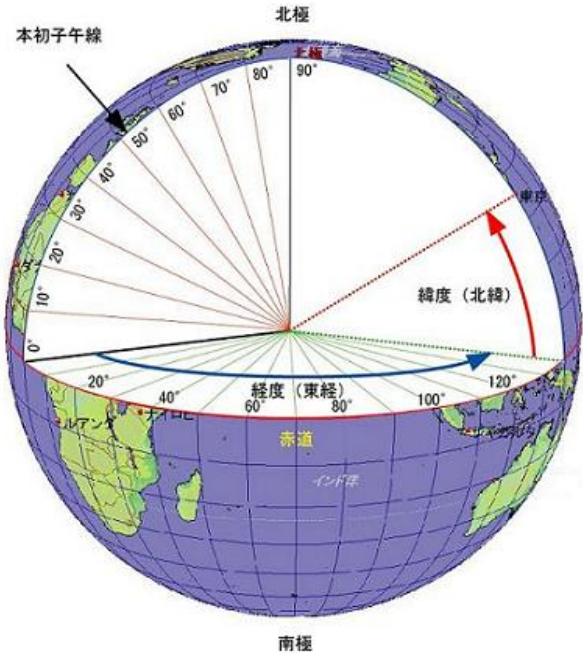
- 1. 隐马尔可夫模型 (一) (8)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (7)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(5)
- 5. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(4)

推荐排行榜

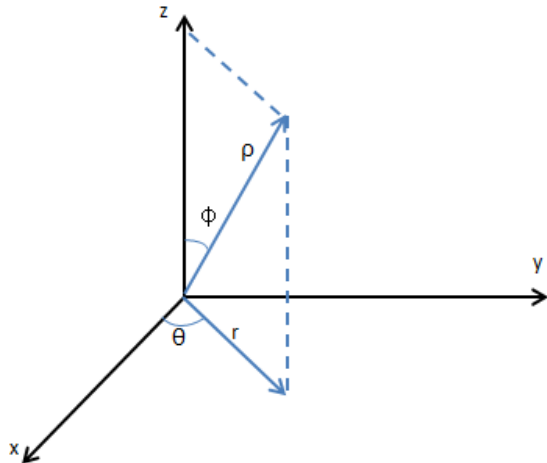
- 1. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(7)
- 2. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (6)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集 (二)——发现频繁项集(5)
- 5. 隐马尔可夫模型 (一) (5)

最新评论

- 1. Re:线性代数笔记3——向量2 (点积)
如果点积小于0, 即夹角小于90°, 这个写错了吧。应该是夹角大于90°
--猫猫猫猫猫大人



也可以通过柱坐标来理解球坐标（关于柱坐标，可参考《多变量微积分笔记19——直角坐标系和柱坐标系下的三重积分》）：



球坐标到柱坐标的互相转换相当于rz平面的极坐标表示法：

$$\begin{aligned}r &= \rho \sin\phi \\x &= r \cos\theta = \rho \sin\phi \cos\theta \\y &= r \sin\theta = \rho \sin\phi \sin\theta \\z &= \rho \cos\phi \\\rho &= \sqrt{r^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\end{aligned}$$

以上是球坐标系的所有公式，实际上只要记住图形就可以了。

如果仅定义了ρ和φ，相当于向量绕着z轴旋转；特别地，当ρ从原点出发绕z轴旋转，将形成一个圆锥体，如下图所示：

2. Re:线性代数笔记10——矩阵的LU分解写的很好，不过LU分解的前提是错的，LU分解只需要第三个条件，如果允许行置换就是下面写到的PLU，可以分解所有矩阵

--wiki3D

3. Re:单变量微积分笔记20——三角替换1 (sin和cos) 很nice

--尹保棕

4. Re:线性代数笔记24——微分方程和exp(At)

有些图片挂了呢

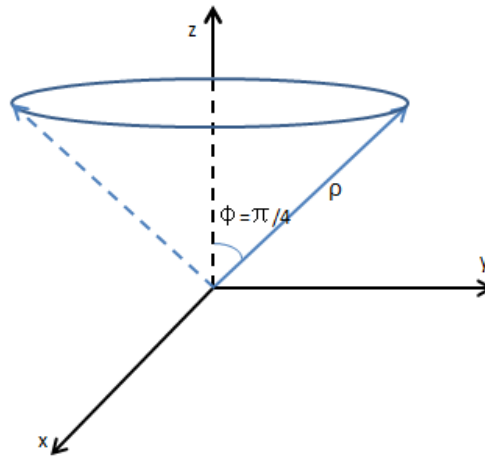
--ccchendada

5. Re:寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程

提个issue，最速降线中

$v = \{2gh\}^{1/2}$ 与配图不一致，建议以起点为原点，向右伸出x轴，向下伸出y轴建立坐标系

--trustInU

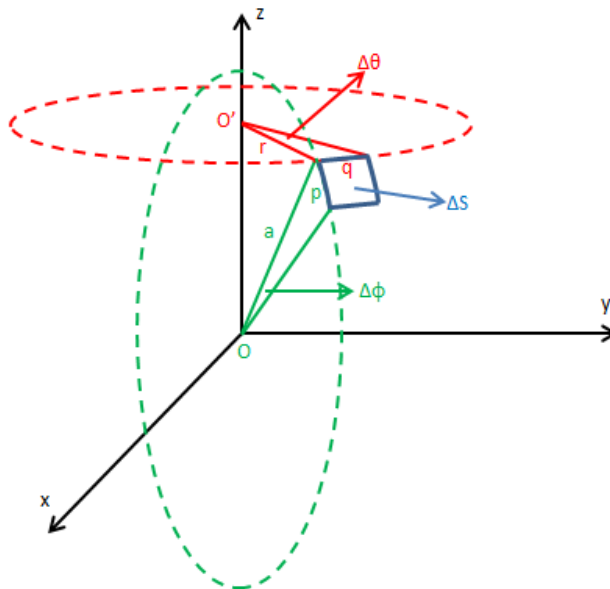


如果 $\phi = \pi/2$ ，则变成扁平的高度为0的圆锥——xy平面的圆。

球坐标系的积分

想要计算三重积分，就需要知道体积积元 dv ，在球坐标系中 dv 需要转换成 $\rho d\rho d\phi d\theta$ ，那么三者的顺序，也就是面积积元应当是什么？

尝试用 $d\phi d\theta$ 作为面积积元，如下图所示：



ΔS 是三维空间中物体表面面积的微小面积块，在球坐标系中，当 $\Delta\phi$ 和 $\Delta\theta$ 足够小时， ΔS 的两边 p 和 q 可以看作以 O 和 O' 为圆心的圆的微小弧长，两个圆互相垂直。如果两个圆的半径分别为 r 和 a ，则：

$$p \approx a\Delta\phi, \quad q \approx r\Delta\theta = a\sin\phi\Delta\theta$$

$$\Delta S = pq \approx (a\Delta\phi)(a\sin\phi\Delta\theta) = a^2 \sin\phi \Delta\phi \Delta\theta$$

$$dS = a^2 \sin\phi d\phi d\theta$$

$\Delta\rho$ 是 ΔV 的厚度积元，对于球坐标来说， $a = \rho$ ：

$$\Delta V \approx \Delta\rho \Delta S = \Delta\rho a^2 \sin\phi \Delta\phi \Delta\theta = \rho^2 \sin\phi \Delta\rho \Delta\phi \Delta\theta$$

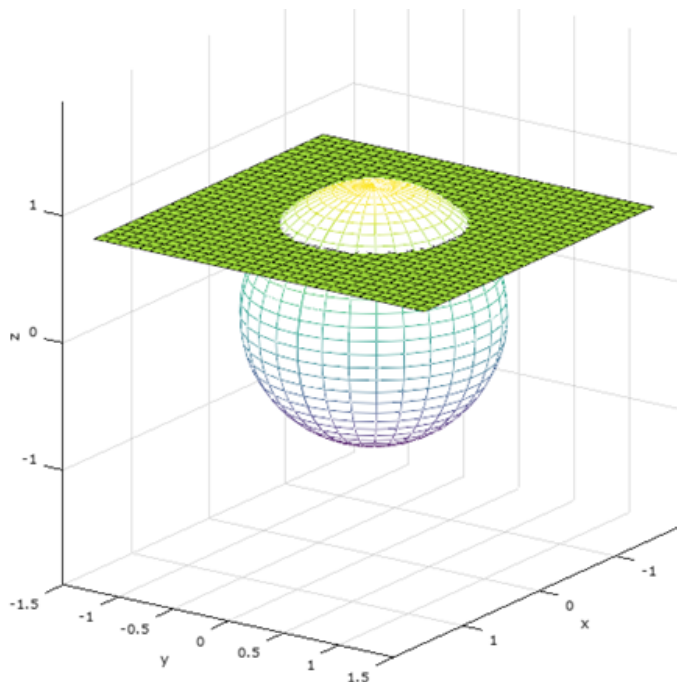
$$dV = \rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta$$

通常按照 $d\rho d\phi d\theta$ 的顺序计算最为简单。

综合示例

示例1

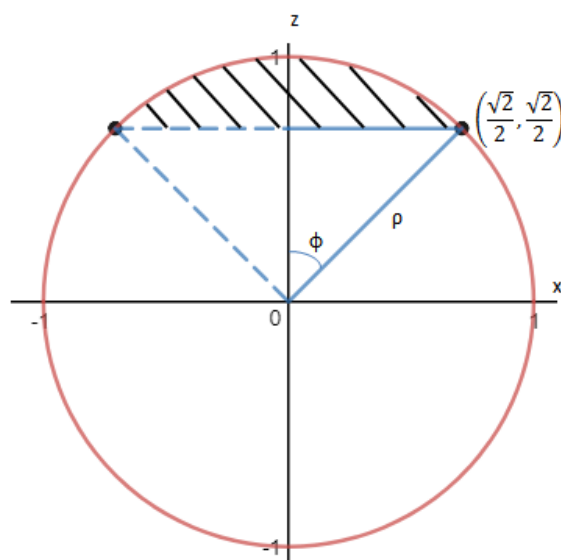
计算单位球和 $z = 2^{-1/2}$ 所围的区域的体积：



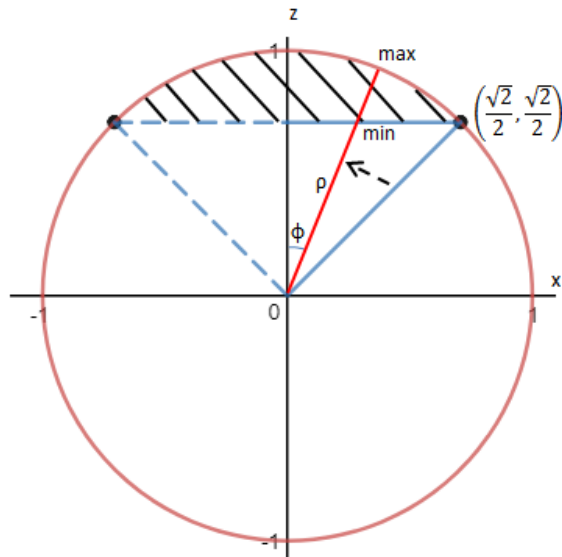
尝试使用球坐标处理，积分很简单：

$$\iiint dv = \iiint \rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta$$

问题转换成确定 $\rho\phi\theta$ 的取值范围。因为是球体，很明显 θ 的取值范围就是 $[0, 2\pi]$ 。通过球体的切面图形确定其余两个积元的取值：



切面左右两侧对称，只需要观察一侧即可。 ϕ 是直角三角形的一角，随着 ρ 的滑动， ϕ 的取值将是 $[0, \pi/4]$ 。无论 ϕ 怎样取值， ρ 的最大值都在球面上，所以 ρ 的最大值是1。当 $\phi=0$ 时， ρ 在 z 轴上，此时 ρ 的最小值是 $2^{-1/2}$ 。这里很容易将 ρ 的取值误判为 $[2^{-1/2}, 1]$ ，这需要用下图解释：



ρ 向 z 轴方向旋转, 此时 ϕ 减小, ρ 的最大值始终位于球面, 最小值是 ρ 与平面的交点处, 所以 ρ 与 ϕ 有关。当 ρ 取最小值时, z 始终是 $2^{-1/2}$, 通过球坐标的公式可知:

$$z = \rho \cos \phi = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \rho = \frac{\sqrt{2}}{2 \cos \phi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sec \phi$$

最终:

$$\iiint dv = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{\sqrt{2}}{2} \sec \phi}^1 \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$$

分步计算 (三角函数的积分可参考《[数学笔记21——三角替换2 \(tan和sec\)](#)》):

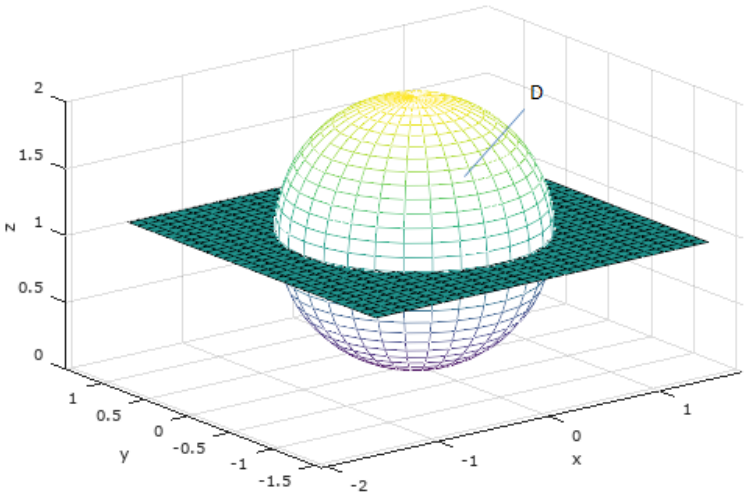
$$\begin{aligned} \int_{\frac{\sqrt{2}}{2} \sec \phi}^1 \rho^2 \sin \phi d\rho &= \sin \phi \frac{\rho^3}{3} \Big|_{\frac{\sqrt{2}}{2} \sec \phi}^1 = \frac{1}{3} \sin \phi - \frac{\sqrt{2}}{12} \sin \phi \sec^3 \phi \\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{3} \sin \phi - \frac{1}{3} \sin \phi \frac{\sqrt{2}}{4} \sec^3 \phi d\phi &= \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \phi d\phi - \frac{\sqrt{2}}{12} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \phi \sec^3 \phi d\phi \\ &= \left(-\frac{1}{3} \cos \phi - \frac{\sqrt{2} \tan^2 \phi}{12 \cdot 2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{5\sqrt{2}}{24} \end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{3} - \frac{5\sqrt{2}}{24} d\theta = \frac{2\pi}{3} - \frac{5\sqrt{2}\pi}{12}$$

$$\iiint dv = \frac{2\pi}{3} - \frac{5\sqrt{2}\pi}{12}$$

示例2

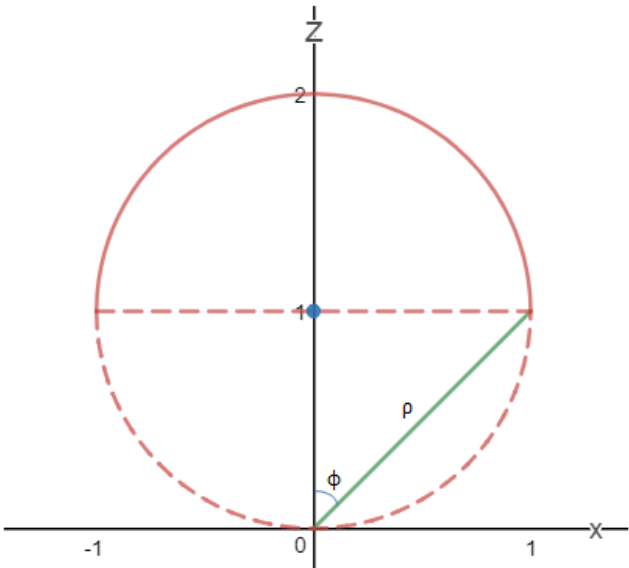
立体区域 D 是圆心在 $(0, 0, 1)$ 的单位圆的上半圆, 计算 D 的体积和圆点到 D 的平均距离。



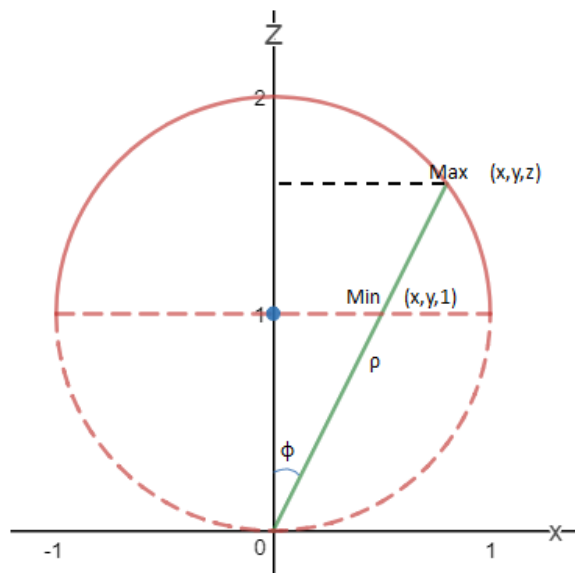
根据球的图体积公式：

$$V(D) = \frac{4}{3}\pi r^3 \times \frac{1}{2} = \frac{2}{3}\pi$$

现在使用积分去计算。和示例1一样，很容易确定 θ 的积分域是 $[0, 2\pi]$ 。通过zx轴的截面确定 φ 的积分域：



上图可以看出， φ 的最大值是 $\pi/4$ ， φ 的积分域是 $[0, \pi/4]$ 。 ρ 的取值如下图所示：



可以看到， ρ 的积分上下限都不固定，它们随着 ϕ 的变换而改变，Max点是 (x,y,z) ，其中：

$$\rho_{min} = 1 \cos \phi \Rightarrow \rho_{min} = \sec \phi$$

现在的问题是如何求得 ρ 的积分上限？求解方式是从几个已知条件和极坐标的公式中让 ρ 变成 θ 和 ϕ 的函数：

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + (z-1)^2 &= (\rho \sin \phi \cos \theta)^2 + (\rho \sin \phi \sin \theta)^2 + (\rho \cos \phi - 1)^2 \\ &= \rho^2 \sin^2 \phi + (\rho \cos \phi - 1)^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \rho = 2 \cos \phi$$

最终：

$$V(D) = \iiint_D dv = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\sec \phi}^{2 \cos \phi} \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$$

又是一个冗长的三角换元，分步计算如下：

$$\begin{aligned}
 \int_{\sec\varnothing}^{2\cos\varnothing} \rho^2 \sin\varnothing d\rho &= \frac{1}{3} \rho^3 \sin\varnothing \Big|_{\rho=\sec\varnothing}^{\rho=2\cos\varnothing} = \frac{1}{3} (8\cos^3\varnothing \sin\varnothing - \sec^3\varnothing \sin\varnothing) \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (8\cos^3\varnothing \sin\varnothing - \sec^3\varnothing \sin\varnothing) d\varnothing \\
 &= \frac{1}{3} \left(8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3\varnothing \sin\varnothing d\varnothing - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan\varnothing \sec^2\varnothing d\varnothing \right) \\
 &= \frac{1}{3} \left(8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} -\cos^2\varnothing d\cos\varnothing - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan\varnothing d\tan\varnothing \right) \\
 &= \frac{1}{3} \left(-2\cos^4\varnothing - \frac{\tan^2\varnothing}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\
 &= \frac{1}{3} \\
 \int_0^{2\pi} \frac{1}{3} d\theta &= \frac{2}{3}\pi
 \end{aligned}$$

球的体积也可以使用一元积分的圆盘法求的，可参考《[数学笔记17——定积分的应用2（体积）](#)》。

在《[多变量微积分笔记10——二重积分的应用](#)》中介绍过均值问题，三重积分与之类似，距离的均值相当于在D区域内对ρ进行积分处理：

$$\overline{distance} = \frac{1}{V(D)} \iiint_D \rho dv = \frac{3\pi}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\sec\varnothing}^{2\cos\varnothing} \rho^3 \sin\varnothing d\rho d\varnothing d\theta$$

作者：我是8位的

出处：<http://www.cnblogs.com/bigmonkey>

本文以学习、研究和分享为主，如需转载，请联系本人，标明作者和出处，非商业用途！

扫描二维码关注公众号“我是8位的”



随笔

分类: [多变量微积分](#)

标签: [球坐标系](#)

好文要顶

关注我

收藏该文

我是8位的
关注 - 5
粉丝 - 288
[+加关注](#)

0

推荐

0

反对

« 上一篇: 概率笔记5——概率分布

» 下一篇: 多变量微积分笔记21——空间向量场中的通量

posted on 2018-05-23 19:10 我是8位的 阅读(7221) 评论(0) 编辑 收藏 举报

[刷新评论](#) [刷新页面](#) [返回顶部](#)

登录后才能查看或发表评论, 立即 [登录](#) 或者 [逛逛](#) [博客园首页](#)

【推荐】华为 HWD 2022 故事征集, 分享最打动你的科技女性故事

【推荐】华为开发者专区, 与开发者一起构建万物互联的智能世界

广告 X

yzodcs.com

永中DCS, 文档在线
预览处理专家

10年行业经验, 受到众多政府客户、央企
单位、邮箱客户、OA办公系统、招聘网站、
教育客户青睐

了解详情 >

编辑推荐:

- 革命性创新, 动画杀手锏 @scroll-timeline
- 戏说领域驱动设计 (十二) —— 服务
- ASP.NET Core 6框架揭秘实例演示[16]: 内存缓存与分布式缓存的使用
- .Net Core 中无处不在的 Async/Await 是如何提升性能的?
- 分布式系统改造方案 —— 老旧系统改造篇

#她的梦想在发光#
HWD科技女性故事有奖征集
活动时间: 2022年3月8日-3月18日

最新新闻:

- 乔布斯的创业搭档: 他缺乏工程师才能, 不得不锻炼营销能力来弥补
 - 美国大厂码农薪资曝光: 年薪18万美元, 够养家, 不够买海景房
 - 两张照片就能转视频! Google提出FLIM帧插值模型
 - Android 再推 “杀手级” 功能, 可回收 60% 存储空间
 - 溺在理财暴雷潮的投资人: 本金63万, 月兑25元不够卖菜
- » 更多新闻...

Powered by:

博客园

Copyright © 2022 我是8位的

Powered by .NET 6 on Kubernetes